www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1989

MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE
OPTION M

(Durée de l'épreuve 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - M.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 6 pages.

***

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLEME

Soit E l'espace préhilbertien des fonctions continues sur [0,1] à valeurs réelles ou complexes ; le produit scalaire est défini par :

$$(f|g) = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\| \ \|_2$.

On définit également, pour tout élément f de E, la norme uniforme notée $\| \ \|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel E' de E est dense relativement à la norme $\| \ \|_2$ (respectivement à la norme $\| \ \|_\infty$) si, pour tout élément f de E, il existe une suite (φ_n) d'éléments de E' telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$ (respectivement $\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$).

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômiales.

Pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, on désigne par e_α l'élément de E défini par $e_\alpha(t) = t^\alpha$.

Etant donnée une suite strictement croissante A de nombres réels positifs α_k, où $k \geqslant 1$, on appelle V_A le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions e_{α_k} lorsque k parcourt $\mathbb{N}^*$.

L'objectif du problème est de caractériser les suites A telles que V_A soit dense dans E relativement à la norme $\| \ \|_2$, ce qui fait l'objet de la partie III, la partie IV étudiant le même problème relativement à la norme $\| \ \|_\infty$. Dans la partir I, on établit d'abord que $\mathcal{P}$ est dense dans E pour chacune des normes et dans la partie II, on étudie la distance d'un élément de E à un sous-espace de dimension finie de E. La partie II et la partie III, à part la question III 6°, sont indépendantes de la première partie.

PARTIE I

Soit F l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π - périodiques, à valeurs complexes. Pour tout élément g de F, on définit la norme uniforme de g par $\|g\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$.

Pour tout entier naturel n, on note T_n le sous-espace vectoriel de F engendré par les fonctions $t \mapsto e^{ikt}$, où les nombres entiers k vérifient $-n \leqslant k \leqslant n$.

1°) Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(t) = a_n \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}$$, le réel a_n étant tel que $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_n(t)\, dt = 1$.

a) Montrer que la fonction φ_n est un élément de T_n.

b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geqslant 1 - \sin u$.

En déduire que, pour tout entier n, $\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\, du \geqslant \frac{1}{n+1}$

puis que $a_n \leqslant (n+1)/4$.

c) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} \varphi_n(t) = 0 .$$

2°) Soit g un élément de F. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_n(t)\, g(u - t)\, dt .$$

a) Etablir la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_n(u - t)\, g(t)\, dt.$$

En déduire que Q_n appartient à T_n.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b) Soit toujours δ un élément de $]0, \pi[$; démontrer l'inégalité :

$$|g(u) - Q_n(u)| \leqslant \sup_{|t|\leqslant\delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi} \varphi_n(t)$$

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

d) On suppose que g est une fonction paire : montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n, tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.

3°) a) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. (On prolongera f en une fonction paire sur $[-1, +1]$, notée $\tilde{f}$, et on introduira $g(u) = \tilde{f}(\cos u)$.) En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans E relativement à la norme uniforme $\| \ \|_\infty$.

b) Montrer que, pour tout élément f de E, on a l'inégalité $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$. En déduire que $\mathcal{P}$ est également dense dans E relativement à la norme $\| \ \|_2$.

4°) On se propose de prouver que le sous-espace W de E engendré par $e_0, e_2, e_4, \ldots, e_{2k}, \ldots$ est dense dans E relativement à la norme uniforme (donc également pour la norme $\| \ \|_2$).

a) Soit ψ la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $\psi(u) = 1 - \sqrt{1-u}$.

Ecrire le développement en série entière de ψ sur $]-1, +1[$:

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n u^n \ .$$

b) Montrer que la suite $n^{3/2} b_n$ admet une limite finie strictement positive, lorsque n tend vers l'infini. (A cet effet, on posera $c_n = \ln\left(n^{3/2} b_n\right)$ et on étudiera la série de terme général $c_{n+1} - c_n$.)

En déduire que la série de terme général $b_n u^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

c) Prouver que e_1 est limite d'une suite d'éléments de W pour la norme $\| \ \|_\infty$. (On observera que sur $[0, 1]$, $t = \sqrt{1 - (1-t^2)}$.)

d) En déduire que W est dense dans E relativement à la norme $\| \ \|_\infty$.

PARTIE II

Etant donnés des éléments $g_1, g_2, \ldots, g_p$ de E, on note $G_p(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre p d'éléments $(g_i | g_j)$, où $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des éléments de E et H le sous-espace vectoriel de E, engendré par ces éléments.

Pour tout élément f de l'espace préhilbertien E, on note $d_H(f)$ la distance de f à H : $d_H(f) = \inf_{v\in H} \|f-v\|_2$.

On se propose de fournir un mode de calcul de cette distance.

1°) a) Montrer que, si v est un élément de H,

$$G_{n+1}(f_1, f_2, \ldots, f_n, v) = 0 \ .$$

b) Montrer que, si u est orthogonal à H,

$$G_{n+1}(f_1, f_2, \ldots, f_n, u) = \|u\|_2^2 \ G_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \ .$$

2°) Soit f un élément de E ; f s'écrit de manière unique sous la forme $f = u + v$, où v appartient à H et u est orthogonal à H.

a) Démontrer : $d_H(f) = \|u\|_2$.

b) En déduire :

$$G_{n+1}(f_1, f_2, \ldots, f_n, f) = [d_H(f)]^2 \ G_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \ .$$

3°) Montrer également à l'aide de ce qui précède que les éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont indépendants si et seulement si

$G_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$.

PARTIE III

Soit A une suite strictement croissante de nombres réels positifs α_k, où $k \geqslant 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note V_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments e_{α_k}, où $1 \leqslant k \leqslant n$.

Un nombre réel α positif ou nul, distinct des nombres α_k, étant donné, on se propose de calculer la distance $d_{V_n}(e_\alpha)$ notée plus simplement $d_n(e_\alpha)$ de l'élément e_α au sous-espace vectoriel V_n et d'étudier la limite de cette distance lorsque n tend vers $+\infty$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

page 106 Concours commun MINES-PONTS-TELECOM-... 1969 2 option M-Math 2

1°) Montrer que la suite $(d_n(e_\alpha))$ est décroissante.

2°) Calcul préliminaire. Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des suites de nombres réels strictement positifs.
On note Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n d'éléments $(a_i + b_j)^{-1}$. La valeur de Δ_1 est $(a_1 + b_1)^{-1}$; pour tout $n \geqslant 2$,

démontrer la relation :

$$\Delta_n \cdot \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} (a_i + b_j) = \prod_{i<j} (a_j - a_i) \cdot \prod_{i<j} (b_j - b_i) \ .$$

3°) Calculer $G_n\left(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}\right)$; en déduire quelle est la dimension de V_n .

4°) Calculer $G_{n+1}\left(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}, e_\alpha\right)$; en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$d_n(e_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \cdot \prod_{k=1}^{k=n} \frac{|\alpha - \alpha_k|}{\alpha + \alpha_k + 1} \ .$$

5°) Recherche de la limite de $d_n(e_\alpha)$:

a) On suppose que la suite (α_k) est bornée.

Prouver que la suite $(d_n(e_\alpha))$ converge vers 0.

b) On suppose que la suite (α_k) n'est pas bornée.

Démontrer que la suite $d_n(e_\alpha)$ converge vers 0 si et seulement si la série de terme général $(\alpha_k)^{-1}$ diverge.

Pour cela, on pourra montrer que la série de terme général $u_k = \ln \left|\frac{\alpha_k - \alpha}{\alpha_k + \alpha + 1}\right|$, où $k \geqslant 2$, est de même nature que la série de terme général $v_k = \frac{1}{\alpha_k}$.

6°) En déduire que le sous-espace vectoriel V_A engendré par les fonction e_{α_k} , où $k \geqslant 1$, est dense dans E relativement à la norme $\| \ \|_2$, si et seulement si la série de terme général $v_k = (\alpha_k)^{-1}$ diverge.

Dans le cas où cette série diverge, on établira d'abord que tout polynôme peut être approché par des éléments de V_A et on utilisera ensuite les résultats de la partie I.

PARTIE IV

On se propose de caractériser les suites A telles que V_A soit dense dans E relativement à la norme uniforme.

1°) Préliminaire : Soit f un élément de E, continûment dérivable sur [0, 1] et tel que $f(0) = 0$.

Démontrer que, pour tout element t de [0, 1] ,

$$|f(t)| \leqslant \sqrt{t}\ \|f'\|_2 \ .$$

En déduire que $\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_2$.

2°) Soit A une suite strictement croissante de nombres réels positifs α_k , $k = 1, 2, \ldots$.

Supposons que $\alpha_1 = 0$, que la série de terme général $(\alpha_k)^{-1}$ soit divergente et qu'à partir d'un certain rang p, α_k soit strictement supérieur à 1.

Démontrer la propriété : soit P une fonction polynômiale de $\mathcal{P}$, pour tout ε positif, il existe un rang n et des coefficients d_i tels que :

$$\left| P - d_1 e_{\alpha_1} - \sum_{i=p}^{n} d_i e_{\alpha_i} \right|_\infty < \varepsilon$$

En déduire que l'espace vectoriel V_A est dense dans E pour la norme $\| \ \|_\infty$.

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail